

Modellazione numerica, attraverso la tecnica dei volumi finiti, dei fenomeni di evoluzione d'alveo

Lucio Barbiero, Lisa Maria Castro Tellez, Angela Di Ruocco, Domenico Pianese

Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale "Girolamo Ippolito"- Università degli Studi di Napoli Federico II- Via Claudio, 21 – 80125 Napoli; tel. +39 081 7683451 – fax: +39 081 5938936; barl@email.it; castro@unina.it; angela.diruocco@virgilio.it; pianese@unina.it

Mathematical modelling, by the Finite Volume Method, of river bed changes

ABSTRACT: The following paper deals with the mathematical modeling of the river-bed evolution processes. More particularly, point have been put to two different kinds of numerical models, the first one based on a classical "*three equations approach*" that applies, as a closure condition, a generic sediment transport formula, and, the second, based on a more physically-based "*four equations approach*". The equations at the base of both the models are written for rivers of any cross-section; then, they are integrated by using the Finite Volume Method (FVM), very often used, in the last years, for the simulation of free surface flows. Both the models are explicit; at this time, they are first order precise both in the space and time. They are based, respectively, on a technique of resolution "*decoupled*" and one "*coupled*", depending on the techniques used to solve the set of governing equations (continuity equations for both the liquid and solid phases and momentum equations for the mixture water+sediments). Both the models have been applied, to the purpose to compare their results, to the case of a channel with assigned geometric and grain characteristics. The coupled model has been used besides for the simulation of dam-break phenomena interesting river-beds initially dry or wet, comparing the results obtained with experimental measures taken from the literature and results obtained by other similar numerical models.

Key terms: Sediment transport; river dynamics; fluvial processes; dam-break

Termini chiave: Trasporto solido; dinamica fluviale; modellamento alvei; dam-break

Riassunto

Il presente lavoro ha, come oggetto, la modellazione matematica dei processi di evoluzione d'alveo. Più in particolare, sono stati messi a punto due differenti modelli numerici caratterizzati, il primo, da un classico "*approccio a tre equazioni*" che ricorre, per la chiusura del modello, ad una qualsivoglia formula di trasporto solido, e, il secondo, da un "*approccio a quattro equazioni*", più fisicamente basato rispetto al precedente. Le equazioni alla base dei due modelli sono sviluppate per alvei, eventualmente non prismatici, a sezione del tutto generica, e sono integrate ricorrendo alla Tecnica dei Volumi Finiti. Entrambi i modelli, caratterizzati, per il momento, da una precisione del primo ordine, sono espliciti. Essi sono basati, rispettivamente, su una tecnica di risoluzione "*disaccoppiata*" ed una "*accoppiata*", in relazione alle modalità con cui viene concretamente risolto il sistema di equazioni risultante dalla scrittura delle ben note equazioni di bilancio delle masse liquide e solide e del principio di conservazione delle quantità di moto del miscuglio acqua+sedimenti. Entrambi i modelli sono stati applicati, allo scopo di confrontarne i risultati, al caso di un canale di assegnate caratteristiche geometriche e granulometriche. Il modello accoppiato è stato inoltre utilizzato per la

simulazione di fenomeni di dam-break sia su fondo mobile inizialmente asciutto che bagnato, confrontando i risultati ottenuti con misure sperimentali disponibili in letteratura, e coi risultati di altri modelli numerici.

1. Introduzione

I corsi d'acqua naturali sono interessati, abbastanza frequentemente, da processi evolutivi, conseguenti a fenomeni di erosione/deposito, in grado di modificarne anche sostanzialmente l'assetto.

Alle naturali tendenze evolutive delle aste fluviali vanno oggi a sovrapporsi, sempre più frequentemente, processi evolutivi innescati da attività ed interventi antropici, quali: prelievo di inerti dal fondo alveo; sistemazioni idrauliche; sbarramenti, attraversamenti stradali e ferroviari, briglie, ecc. Conseguenza di tali processi, di origine naturale o antropica, può essere, per esempio, il sovralluvionamento dell'alveo o, viceversa, l'erosione generalizzata del profilo del fondo alveo, in grado di svilupparsi anche per diversi chilometri e di arrecare danni alla stabilità di opere eventualmente presenti lungo le sponde del tratto interessato dal suddetto fenomeno. La modellazione numerica e/o sperimentale dei processi evolutivi che si osservano lungo i corsi d'acqua si presenta, dunque, come uno strumento

indispensabile per l'individuazione delle cause d'innescio di fenomeni di deposito e di erosione e, quindi, per la pianificazione di interventi idonei a scongiurare o, almeno, a contenere entro limiti tecnicamente ed economicamente accettabili i danni conseguenti al manifestarsi ed al propagarsi dei fenomeni stessi.

Numerosi sono stati i ricercatori che, a partire dalla fine degli anni '50, si sono dedicati alla modellazione numerica dei processi di evoluzione degli alvei. I modelli numerici (a breve o a lunga scala temporale) realizzati negli ultimi decenni cercano di portare in conto i diversi fenomeni che si verificano in natura mediante un approccio di tipo fisico-matematico che prevede dapprima l'individuazione, poi l'utilizzazione e, infine, quasi sempre, la risoluzione per via numerica di bilanci di massa e quantità di moto totali (o di energia). Sebbene tali modelli siano caratterizzati da differenti scale di dettaglio nella scrittura delle equazioni di bilancio a causa di diversi livelli di semplificazione della realtà fisica e, quindi, da un diverso grado di complessità sia da un punto di vista formale che da un punto di vista computazionale, va osservato che il loro uso non da luogo, di norma, a risultati notevolmente differenti l'uno dall'altro, né tanto meno, è in grado di modificare sostanzialmente gli andamenti fenomenologici individuati a partire dai modelli più semplificati, almeno quando quest'ultimi sono realizzati avendo cura di portare in conto i fattori che giocano un ruolo fondamentale nello sviluppo del fenomeno. Ciò, in particolare, è quanto è accaduto, almeno a partire dai lavori di Hsu & Chu (1964) e di de Vries (1965), per i modelli numerici orientati alla valutazione delle lente modificazioni del profilo longitudinale di fondo alveo conseguenti, ad esempio, alla realizzazione di interventi antropici, quali sbarramenti o delimitazioni d'alveo. Fanno eccezione alcuni approcci, a più riprese proposti, da diversi autori, a partire dalla metà degli anni '60, in cui, a differenza dell'approccio *classico*, che fa riferimento alla possibilità di valutare la portata solida trasportata dalla corrente, anche nel transitorio, attraverso una formula di trasporto solido calibrata, viceversa, in condizioni di equilibrio dinamico, si fa esplicito riferimento a condizioni di *non equilibrio del trasporto solido*.

Nel presente lavoro, tenuta presente la possibilità, dal punto di vista concettuale e numerico, di fare riferimento a due tipi di approccio, sostanzialmente diversi, si descrivono due modelli monodimensionali dei processi di evoluzione degli alvei, recentemente messi a punto dagli scriventi. Il primo dei due modelli presentati si basa sull'assunzione che la corrente sia caratterizzata, istante per istante e punto per punto, da *condizioni di equilibrio dinamico*, per cui la portata solida effettiva coincide con quella ottenibile da formule di trasporto solido (tarate, appunto, nelle suddette condizioni). Il secondo modello, è stato invece definito partendo dall'assunzione che la portata solida trasportata non sia in condizioni di equilibrio. Tale assunzione risulta essere, di norma, molto più rispondente alla realtà fenomenologica, soprattutto quando la corrente è

caratterizzata da transitori rapidi e/o da notevoli e rapide immissioni di materiale solido: in tali circostanze, la concentrazione della fase solida non può essere calcolata, istante per istante e punto per punto, attraverso una semplice formula di trasporto solido, e per la sua valutazione risulta possibile utilizzare un'*equazione di adattamento*, che tiene conto di un andamento nel tempo della concentrazione della fase solida tendente, asintoticamente, alla concentrazione d'equilibrio (definita, a sua volta, in base ad una formula di trasporto solido). I due modelli sono caratterizzati, rispettivamente, da un "*approccio a tre equazioni*", che, nell'ipotesi di transitori lenti, vengono usualmente risolte con una tecnica "*disaccoppiata*", e da uno "*a quattro equazioni*", più frequentemente risolte con una tecnica "*accoppiata*".

2. Il modello disaccoppiato a tre equazioni

2.1 Introduzione

Seguendo un approccio usualmente adottato in letteratura tecnica e, pertanto, "*classico*", il *modello a tre equazioni* messo a punto nel presente lavoro tiene conto del trasporto solido totale (costituito dalla somma di quello al fondo e di quello in sospensione) trattandolo come se fosse costituito dal solo trasporto solido in sospensione. Si indichi con x la coordinata longitudinale, e con t il tempo: considerando un canale di sezione trasversale qualsiasi, si può immaginare che quest'ultima sia costituita da due parti ben distinte, di cui una interessata dal trasporto di un miscuglio omogeneo costituito da acqua e sedimenti, di area $\sigma = \sigma(x, t)$, e, l'altra, disposta su un bedrock collocato ad una profondità arbitraria, costituita dal materiale presente sul fondo e sulle sponde, di area $\sigma_b = \sigma_b(x, t)$. Tale materiale è caratterizzato da una porosità n e da una concentrazione volumetrica della fase solida $C_b = 1 - n$ invarianti nel tempo e nello spazio.

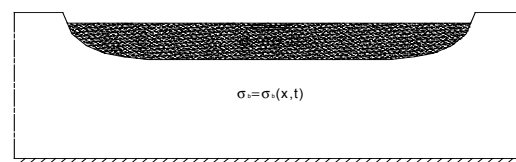


Figura 1. Sezione trasversale presa a riferimento
Definition sketch of the river cross sections

Il materiale solido trasportato dalla corrente si considera, per semplicità, monogranulare, omogeneo, coincidente con quello presente sulle sponde e sul fondo alveo e completamente disperso e mescolato nella fase liquida. Il miscuglio acqua + sedimenti è caratterizzato da una densità media ρ_m variabile nello spazio e nel tempo. Infatti, se si indicano: con $C = C(x, t) = Q_s / Q$ (dove Q_s è la portata

solida totale e Q è la portata complessiva del miscuglio) il valore della concentrazione volumetrica della fase solida, mediata all'interno della sezione idrica, e con ρ_w e ρ_s le densità, rispettivamente, dell'acqua e dei sedimenti, l'espressione di ρ_m è la seguente:

$$\rho_m = \rho_s \cdot C + \rho_w \cdot (1 - C) \quad (1)$$

2.2 Le equazioni alla base del modello

2.2.1 Modellazione accoppiata e disaccoppiata

In base ad un *approccio a tre equazioni*, i processi di trasporto solido e di modellamento dell'alveo possono essere descritti attraverso la valutazione di tre *variabili dipendenti principali* rappresentate, rispettivamente, dalla portata del miscuglio acqua + sedimenti, $Q = Q(x, t)$, dall'area della sezione trasversale interessata dal flusso longitudinale dell'acqua e dei sedimenti, $\sigma = \sigma(x, t)$, dall'area della sezione trasversale del materiale presente, complessivamente, sul fondo e sulle sponde, $\sigma_b = \sigma_b(x, t)$, e da tre *variabili dipendenti secondarie*, rappresentate dalla *Slope-friction* $S_f = S_f(x, t)$, dalla concentrazione volumetrica della fase solida, $C = C(x, t)$, e dalla densità $\rho_m = \rho_m(x, t)$ del miscuglio. Tali variabili sono legate tra loro da tre equazioni di conservazione (equazione di continuità e equazione del moto della fase liquida, equazione di continuità della fase solida), e da tre relazioni ausiliarie (formula di resistenza, formula di trasporto solido ed espressione della densità media del miscuglio). La discretizzazione delle tre equazioni di bilancio precedentemente richiamate conduce a tre espressioni algebriche che, unitamente all'espressione (1), alla formula di trasporto solido ed a quella di resistenza, costituiscono, anche nel più semplice caso di una *formulazione esplicita* del modello matematico, un sistema di sei equazioni nelle sei incognite Q , σ , σ_b , S_f , C , ρ_m , da risolvere, almeno in linea di principio, come tale e, quindi, senza trascurare le reciproche influenze di una variabile rispetto all'altra (*modellazione "accoppiata"*). Seguendo un'impostazione più semplice, spesso ritenuta valida per numeri di Froude non superiori a 0.6-0.7 (de Vries, 1965) ma che, di fatto, alla luce di più recenti analisi (Pianese, 1993), risulta applicabile solo per numeri di Froude non superiori a 0.3-0.4, il modello a tre equazioni preso a riferimento nel presente lavoro utilizza, in luogo di una *tecnica accoppiata* (in cui tutte le equazioni sono risolte contemporaneamente), una *tecnica frazionata* (spesso definita "*disaccoppiata*") in cui vengono risolti, separatamente, e in modo scaglionato, due diversi gruppi di equazioni. In effetti, se si trascurano, nell'ambito di ciascun intervallo temporale di calcolo, le influenze che le variazioni delle quote di fondo alveo e della portata solida hanno sulla portata del miscuglio e sull'area della sezione idrica, si può utilizzare, istante per istante, un

approccio a due stadi che, di fatto, determina la possibilità di mettere a punto un *modello numerico "disaccoppiato"*, costituito da due moduli da utilizzarsi, per ciascuno dei Δt di calcolo, in serie: il primo di tali moduli considera, nell'ambito del Δt di calcolo, condizioni di contorno rigido e assenza di trasporto solido, e consente di individuare, in base alla risoluzione del classico problema del moto vario di correnti a superficie libera in alveo non prismatico e a sezione generica, il valore delle portate defluenti in alveo, le aree delle sezioni idriche, le velocità medie della corrente e gli sforzi di trascinarsi lungo l'alveo; il secondo modulo, a partire dagli sforzi tangenziali o dalle velocità medie di deflusso valutate mediante il primo modulo, consente, attraverso l'utilizzazione di una specifica formula di trasporto solido, di valutare dapprima le portate solide convogliate, in quel determinato intervallo di tempo, lungo i vari tratti e, a partire da queste ultime, le variazioni subite dalle sezioni trasversali a causa delle variazioni del fondo e delle sponde. Le sezioni dell'alveo, così modificate, sono quelle successivamente utilizzate, quali contorni rigidi, per i calcoli relativi al dt successivo.

2.2.2 Le equazioni alla base del modulo idraulico

Nel modulo idraulico le equazioni che governano i fenomeni di propagazione sono scritte in *forma conservativa ed integrale* e risolte con il *Metodo dei Volumi Finiti (FVM)*, estremamente robusto ed in grado di portare in debito conto anche la presenza di discontinuità del campo di moto (ad esempio, risalti idraulici). Utilizzando una modellazione mono-dimensionale, il moto del fluido è descritto da due equazioni di conservazione (una di continuità e, l'altra, del moto), scritte per la sola fase liquida (e non per il miscuglio, come invece è stato fatto nel caso del modello accoppiato successivamente descritto). Tali equazioni, nelle variabili sezione idrica σ e portata Q , integrate sul volume finito di lunghezza Δx rispetto al quale è effettuata la suddivisione del dominio di calcolo, possono essere poste nella seguente forma matriciale:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{(\mathbf{F}_V - \mathbf{F}_M)}{\Delta x} = \mathbf{S} \quad (2)$$

dove, detta i la pendenza di fondo, g l'accelerazione di gravità, e ζ l'affondamento del baricentro di σ , risultano:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma \\ Q \end{bmatrix}; \mathbf{F}_V = \begin{bmatrix} Q_V \\ \frac{Q_V^2}{\sigma_V} + g\sigma_V\zeta_V \end{bmatrix}; \mathbf{F}_M = \begin{bmatrix} Q_M \\ \frac{Q_M^2}{\sigma_M} + g\sigma_M\zeta_M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ g\sigma(i - S_f) \end{bmatrix} \quad (3)$$

\mathbf{U} è il vettore delle "*variabili conservate*" (σ , Q); \mathbf{S} è il vettore dei "*termini sorgente*"; \mathbf{F}_V ed \mathbf{F}_M rappresentano i "*vettori dei flussi*" relativi a tali variabili, valutati, rispettivamente, sull'interfaccia di monte e di valle della

generica cella presa a riferimento (volume finito). A proposito delle modalità di valutazione di tali flussi, va immediatamente osservato che, in conseguenza del diverso valore posseduto, nell'ambito di ciascuna cella, dalle variabili conservate, in corrispondenza di ciascuna interfaccia, di monte e di valle, insorge un *problema di Riemann*, la cui soluzione deve essere perseguita, di fatto, con l'ausilio di uno specifico solutore approssimato. L'espressione dei flussi numerici a monte e a valle dell'*i*-esimo volume finito considerato viene a dipendere proprio dal solutore adottato. La soluzione esatta del problema di Riemann basato sulle equazioni considerate è rappresentata da tre *stati*, separati da due linee caratteristiche attraverso le quali cambiano le due variabili primitive V e σ . Nel presente modello, è stato adottato il solutore approssimato HLL (Fraccarollo & Toro, 1995), che definisce le espressioni delle celerità di propagazione delle due onde della soluzione esatta del problema di Riemann e, in funzione di queste, restituisce le due componenti del *vettore flusso d'intercella*.

Per quanto riguarda la valutazione di S_f , si è ritenuta ancora applicabile, anche nel caso di un moto vario non uniforme, la formula di Strickler, in base alla quale:

$$S_f = \frac{V^2}{K_s^2 R^{4/3}} \quad (4)$$

In essa, V è la velocità media, valutata in corrispondenza del centro del volume finito considerato, R è il raggio idraulico e K_s è il parametro di conducibilità di Strickler. Fissato uno step temporale Δt , le equazioni (2) e (4) sono risolte ricorrendo a una tecnica di risoluzione esplicita (più in particolare, al metodo di Eulero).

2.2.3 Le equazioni alla base del modulo di trasporto

Una volta individuate, in base all'applicazione della tecnica ai volumi finiti precedentemente richiamata, le grandezze caratteristiche del moto (portate, area delle sezioni idriche, velocità medie di deflusso e valor medio degli sforzi tangenziali), risulta possibile:

- Valutare, tratto per tratto, con l'ausilio di classiche formule di trasporto solido al fondo e in sospensione, le portate solide totali convogliate in ciascun tratto;
- Valutare, tratto per tratto, in corrispondenza del centro dell'*i*-esimo volume finito, le variazioni $(\Delta \Sigma_b)_{i,\Delta t}$ subite, nell'intervallo di tempo Δt , dalle aree delle sezioni trasversali dell'alveo;
- ricostruire, a partire dalle nuove sezioni trasversali dell'alveo (valutate in corrispondenza del centro di ciascun volume finito), le nuove sezioni dell'alveo in corrispondenza delle interfacce delle celle.

La valutazione di $(\Delta \Sigma_b)_{i,\Delta t}$ può essere facilmente eseguita, in base all'applicazione dell'equazione di bilancio della massa dei sedimenti in transito nel volume di controllo (*equazione di continuità della fase solida*), trascurando la

variazione, nell'ambito del Δt , della massa di sedimenti trasportata dalla corrente, per cui:

$$(\Delta \Sigma_b)_{i,\Delta t} = -\frac{1}{1-n} \cdot \frac{W_i - W_{i-1}}{\Delta x} \quad (5)$$

In tale espressione, W_i rappresenta il volume di materiale solido transitante nel tratto considerato e W_{i-1} è il volume transitante, durante lo stesso intervallo di tempo, nel volume di controllo immediatamente precedente.

Una volta valutate, in corrispondenza del centro di ciascun volume di controllo, le sezioni $(\Sigma_b)_i^t = (\Sigma_b)_i^{t-\Delta t} + (\Delta \Sigma_b)_{i,\Delta t}$ nel particolare istante t considerato, si procede alla loro interpolazione spaziale, determinando, così, le sezioni $(\sigma_b)_i^t = (\Sigma_b)_{i-1/2}^t$ e $(\sigma_b)_{i+1}^t = (\Sigma_b)_{i+1/2}^t$ in corrispondenza di ciascuna interfaccia tra le celle e, quindi, la pendenza di fondo per ciascun tratto (poi utilizzata nell'equazione del moto della fase liquida nello step temporale successivo).

3. Il modello accoppiato a quattro equazioni

3.1 Le equazioni alla base del modello

Le ipotesi alla base del modello a quattro equazioni sono del tutto simili a quelle del modello a tre sole equazioni, con la differenza che, questa volta, il trasporto di materiale solido non viene ad essere più valutato in base all'applicazione, nel tempo e nello spazio, di una specifica formula di trasporto (valida in condizioni di equilibrio dinamico), ma in base all'utilizzazione di una "equazione di adattamento" che, a sua volta, utilizza, come condizione asintotica, una usuale formula di trasporto solido. Sempre con riferimento alla Figura 1, seguendo un approccio a quattro equazioni, il moto del miscuglio può essere descritto, nel tempo e lungo il corso d'acqua (e, quindi, in funzione delle variabili indipendenti x e t), da quattro variabili dipendenti principali, rappresentate dalla portata del miscuglio acqua+sedimenti, $Q = Q(x, t)$, dall'area della sezione trasversale interessata dal flusso longitudinale dell'acqua e dei sedimenti, $\sigma = \sigma(x, t)$, dall'area della sezione trasversale del materiale presente, complessivamente, sul fondo e sulle sponde, $\sigma_b = \sigma_b(x, t)$, e dal prodotto $C \cdot \sigma = C(x, t) \cdot \sigma(x, t)$ della concentrazione volumetrica della fase solida per l'area della sezione trasversale interessata dal flusso longitudinale dell'acqua e dei sedimenti, nonché da due variabili dipendenti secondarie, rappresentate dalla *Slope-friction* $S_f = S_f(x, t)$, e dalla densità $\rho_m = \rho_m(x, t)$ del miscuglio. Tali variabili sono legate dalle seguenti tre equazioni di bilancio (esprimenti, rispettivamente, i principi di conservazione della massa del miscuglio, della massa solida e delle quantità di moto del miscuglio) e da un'equazione di adattamento:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{(Q_v - Q_M)}{\Delta x} = q_L - \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_m Q)}{\partial t} + \frac{\rho_{mV} \left(\frac{Q_V^2}{\sigma_V} + g\sigma_V \zeta_V \right) - \rho_{mM} \left(\frac{Q_M^2}{\sigma_M} + g\sigma_M \zeta_M \right)}{\Delta x} = g\sigma(i - Sf) \quad (7)$$

$$\frac{\partial(C\sigma)}{\partial t} + \frac{(C_V Q_V - C_M Q_M)}{\Delta x} = C_L q_L - (1-n) \frac{\partial\sigma_b}{\partial t} \quad (8)$$

$$-(1-n) \frac{\partial\sigma_b}{\partial t} = \omega \frac{w}{A} (C_* - C) \quad (9)$$

In tali equazioni, scritte integrando le equazioni puntuali all'interno del generico elemento di lunghezza Δx costituente un "volume finito", le grandezze q_L e C_L rappresentano, rispettivamente, la portata liquida uniformemente ed ortogonalmente immessa lungo il percorso e la sua concentrazione volumetrica di sedimenti, ω è la lunghezza della parte del contorno della sezione direttamente interessata da fenomeni di erosione e/o deposito di materiale solido, w è la velocità di sedimentazione dei grani, A è la "lunghezza di adattamento" (parametro adimensionale legato al meccanismo di trasporto solido prevalente e valutabile, ad esempio, con la formula di Armanini & Di Silvio, 1988) e C_* è la concentrazione volumetrica asintoticamente raggiungibile dalla fase solida qualora le condizioni di moto locali ed istantanee permanessero inalterate indefinitamente nel tempo e nello spazio, ed individuabile mediante la formula di trasporto solido prescelta.

La "chiusura" del modello è ottenuta facendo altresì riferimento alle espressioni (1) e (4), in modo da pareggiare il numero di equazioni e di incognite.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\frac{Q_V^2}{\sigma_V} - \frac{Q_M^2}{\sigma_M} + g\sigma_V \zeta_V - g\sigma_M \zeta_M}{\Delta x} = g\sigma(i - Sf) - \frac{v}{\rho_m} \cdot \left[q_L (\rho_L - \rho_m) - \frac{\partial\sigma_b}{\partial t} (\rho_b - \rho_m) \right] + \left[\frac{\left(\frac{Q_V^2}{\sigma_V} + g\sigma_V \zeta_V - v_m Q_V \right)}{\rho_m \Delta x} \cdot (\rho_{mV} - \rho_m) - \frac{\left(\frac{Q_M^2}{\sigma_M} + g\sigma_M \zeta_M - v_m Q_M \right) (\rho_{mM} - \rho_m)}{\rho_m \Delta x} \right] \quad (7')$$

L'equazione (7) può essere trattata, molto più semplicemente, se si ha cura, come suggerito da alcuni autori con riferimento a modelli non preventivamente

integrati nello spazio (Brufau et al., 2000), di riportare la densità media del miscuglio solo al suo secondo membro (7').

Introducendo una notazione matriciale, il sistema di equazioni può essere scritto nel modo seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{(\mathbf{F}_V - \mathbf{F}_M)}{\Delta x} = \mathbf{S} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_b}{\partial t} = -\frac{1}{1-n} \omega \frac{w}{A} (C_* - C) \quad (11)$$

dove, con i loro usuali significati, i simboli rappresentano:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sigma \\ Q \\ C\sigma \end{bmatrix}; \mathbf{F}_V = \begin{bmatrix} Q_V \\ \frac{Q_V^2}{\sigma_V} + g\sigma_V \zeta_V \\ C_V Q_V \end{bmatrix}; \mathbf{F}_M = \begin{bmatrix} Q_M \\ \frac{Q_M^2}{\sigma_M} + g\sigma_M \zeta_M \\ C_M Q_M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} q_L - \frac{\partial\sigma_b}{\partial t} \\ g\sigma(i - Sf) - \frac{v_m}{\rho_m} \left[q_L (\rho_L - \rho_m) - \frac{\partial\sigma_b}{\partial t} (\rho_b - \rho_m) \right] + \\ + C_L q_L - (1-n) \frac{\partial\sigma_b}{\partial t} \end{bmatrix}$$

3.2 Risoluzione numerica delle equazioni

Anche in questo caso, l'integrazione numerica del sistema di equazioni precedentemente riportato è stata effettuata, come già detto, ricorrendo al Metodo dei Volumi Finiti, in cui le *variabili conservate* σ, Q e $(C \cdot \sigma)$ sono assunte, per semplicità, costanti in ciascun elemento di volume, seppure di valore diverso da cella a cella, il che consente di conseguire solo un'approssimazione del primo ordine.

Ricorrendo al metodo di Eulero per la risoluzione delle equazioni differenziali, avvalendosi del "time marching approach" e di una tecnica esplicita, fissato uno step temporale Δt , le tre variabili conservate corrispondenti al j -esimo istante ed all' i -esimo volume finito sono state calcolate seguendo i passi qui di seguito riportati:

1. ricorrendo all'equazione di adattamento, in cui sono utilizzati i valori delle variabili conservate all'istante $j-1$, si calcola l'evoluzione della sezione di fondo alveo;
2. si calcola il vettore dei termini sorgente \mathbf{S}_i^{j-1} ;
3. si procede al calcolo delle variabili conservate relative al tratto i -esimo e all'istante j -esimo ricorrendo al seguente schema:

$$\mathbf{U}_i^j = \mathbf{U}_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{Vi}^{j-1} - \mathbf{F}_{Mi}^{j-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int \mathbf{S}_i^{j-1} dx \quad (12)$$

La tecnica di risoluzione del sistema di quattro equazioni costituito dalle (10) e (11) è definita "accoppiata": tale definizione è dovuta al fatto che le

quattro equazioni sono risolte contemporaneamente in ogni Δt di calcolo.

Nel caso in esame, la soluzione esatta del problema di Riemann è rappresentata da quattro stati, separati da tre linee caratteristiche. La concentrazione volumetrica della fase solida cambia solo attraverso la linea caratteristica centrale; invece, le altre due variabili primitive ($V=Q/\sigma$ e σ) cambiano attraverso le due linee caratteristiche estreme, ma non attraverso quella centrale. Nel presente modello, per la risoluzione del problema di Riemann è stato adottato il solutore approssimato HLLC (Fraccarollo & Toro, 1995). Tale approccio, derivante da quello del solutore approssimato HLL, tiene conto, però, anche della linea caratteristica di contatto e, pertanto, restituisce un vettore "flusso" avente la prima e la seconda componente identiche a quelle ottenute ricorrendo al solutore HLL, e la terza componente data dal prodotto della prima per la concentrazione volumetrica C , avente la seguente espressione:

$$C = \begin{cases} C_L & s^* \geq 0 \\ C_R & s^* < 0 \end{cases} \quad (13)$$

dove s^* rappresenta la celerità dell'onda di contatto.

4. Confronto tra il modello accoppiato e quello disaccoppiato

I due modelli sono stati applicati ad un particolare caso di studio, al fine di metterne a confronto le capacità ed i limiti. Il caso di studio preso in esame consiste nel processo di evoluzione del fondo che si verifica all'interno di un canale prismatico, rettangolare, lungo 800 m e largo 9 m, con fondo mobile e pareti fisse, e con pendenza iniziale del fondo pari a 0.0003 m/m. In esso defluisce una corrente di assegnata portata in ingresso, pari a 9.0 m³/s. Nella sezione di valle si sono imposti, rispetto al piano orizzontale assunto come riferimento, un livello idrico pari a 1.55 m e una quota del fondo iniziale pari a 0.5 m. Il materiale solido presente nella corrente e sul fondo ha diametro pari a 0.2 mm e densità pari a 1500 Kg/m³. L'ulteriore condizione all'imbocco, relativa al valore della concentrazione volumetrica del materiale solido in ingresso, è fissata imponendo la stessa portata solida calcolata nella sezione di valle, con profilo corrispondente a quello ivi determinato. Sia per la corrente che per il materiale in sospensione è stata assunta la condizione iniziale di moto uniforme. In entrambi i modelli, i calcoli sono stati effettuati: a) imponendo $\Delta x = 4m$ e un valore del Δt derivante dal rispetto della condizione di Levy-Friedrichs-Courant; b) utilizzando le formule di trasporto solido di van Rijn (1984) e la formula di resistenza di Gauckler-Strickler con $n_M = 0.0133$. A partire da tali formule, è stata valutata la nuova pendenza di equilibrio che il canale deve, asintoticamente, raggiungere, in virtù delle specifiche condizioni assegnate al contorno. Essa è risultata pari a 0.00021 m/m. I risultati delle

elaborazioni effettuate sono rappresentati, nella successiva Figura 2, in termini di differenza tra i valori delle quote di fondo alveo ottenute, in un determinato istante, con l'ausilio dei due modelli numerici, e i valori che le quote stesse raggiungono quando ciascun modello perviene alla pendenza d'equilibrio (trovata in base alla formula di trasporto solido adottata).

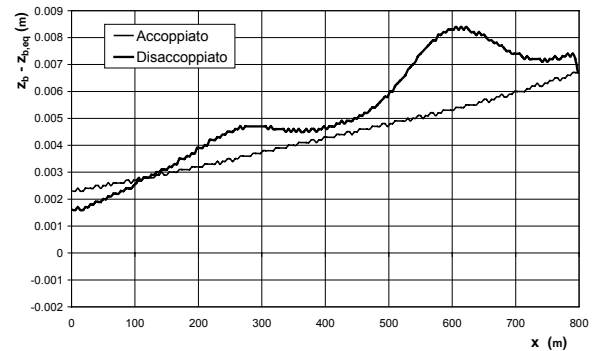


Figura 2. Differenze tra le quote di fondo alveo valutate a $t=230000$ s e quelle al raggiungimento dell'equilibrio
Differences between the river bed elevations evaluated at $t=230.000$ s and the ones at the equilibrium

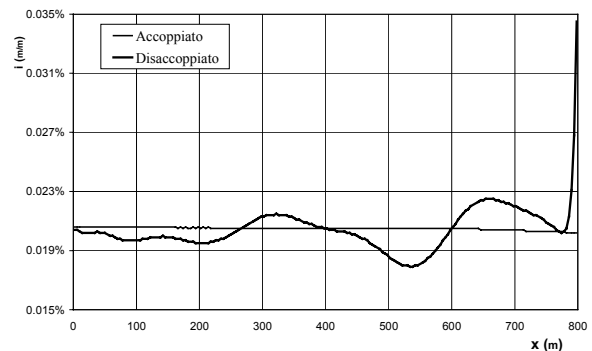


Figura 3. Differenze tra le pendenze di fondo alveo valutate a $t=230000$ s e quelle al raggiungimento dell'equilibrio
Differences between the river bed slopes evaluated at $t=230.000$ s and the ones at the equilibrium

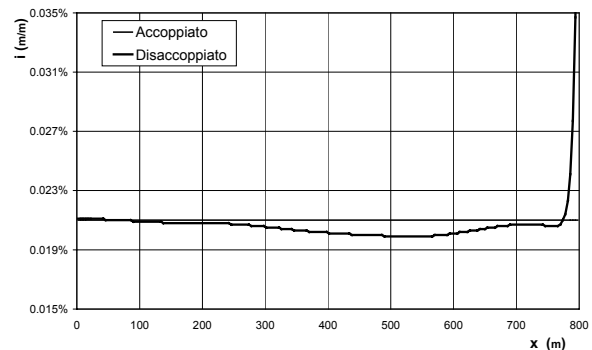


Figura 4. Differenze tra le pendenze di fondo alveo valutate a $t=460000$ s e quelle al raggiungimento dell'equilibrio
Differences between the river bed slopes evaluated at $t=230.000$ s and the ones at the equilibrium

Dai grafici di Fig. 2, 3 e 4 si osserva che i tempi impiegati dai due modelli per raggiungere le quote di fondo e la pendenza di equilibrio attese risultano essere notevolmente diversi: infatti, le differenze tra i valori delle quote di fondo per un fissato istante e quelli assunti nella condizione di equilibrio sono molto più piccole per il modello accoppiato che, dunque, risulta essere molto più veloce del modello disaccoppiato nella riproduzione del fenomeno (460.000 s nel caso del modello accoppiato contro i 1.595.000 s del modello disaccoppiato). Questa notevole differenza è dovuta, sicuramente, alle differenti modalità di risoluzione del sistema di equazioni cui si ricorre per la modellazione dei processi d'evoluzione d'alveo. Inoltre, sebbene ciò non possa essere notato dalle Figure 3 e 4, è stato osservato che entrambi i modelli tendono a riprodurre, senza instabilizzarsi, il profilo del fondo atteso nella condizione d'equilibrio. L'evoluzione del fondo riprodotta dai due modelli è, tuttavia, completamente diversa: mentre il modello disaccoppiato restituisce un fondo caratterizzato da fenomeni di deposito ed erosione più fortemente localizzati, quello accoppiato restituisce, in maniera più realistica, un fondo dell'alveo caratterizzato, nel tempo, da un'evoluzione più uniforme nell'intera sua lunghezza.

Da quanto visto, appare dunque evidente come, anche nel caso in cui occorra investigare su fenomeni di evoluzione d'alveo che si sviluppano su una lunga scala temporale, un modello accoppiato sia senz'altro da preferire ad uno disaccoppiato. Ciò, non solo per la maggiore velocità di convergenza di tale tipo di modello, ma anche per la sua capacità di riprodurre più fedelmente i fenomeni reali.

5. Dam-Break su fondo mobile

Il modello accoppiato precedentemente descritto è stato anche utilizzato per la simulazione di fenomeni di dam-break su fondo mobile, al fine di verificarne le capacità predittive anche nel caso di transitori molto rapidi. Allo scopo di confrontare i risultati di tale modello con alcuni risultati sperimentali e numerici già disponibili in letteratura, nelle simulazioni si è fatto specifico riferimento alle caratteristiche geometriche, idrauliche e granulometriche utilizzate negli esperimenti condotti da Capart e Young (1998). Le simulazioni di dam-break sono state eseguite sia per condizioni di fondo inizialmente asciutto che di fondo bagnato: nel primo caso, i risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli sperimentali di Capart & Young (1998) e con quelli numerici di Caleffi & Valiani (2002); nel secondo caso, invece, sono stati confrontati solo con quelli numerici di Caleffi & Valiani (2002), in quanto Capart & Young (1998) hanno effettuato sperimentazioni solo per fondo asciutto. Va precisato, infine, che, per poter effettuare il confronto con i risultati numerici di Caleffi & Valiani (2002), la concentrazione d'equilibrio è stata valutata con la formula di Capart &

Young (1998) (ripresa anche da Caleffi & Valiani, 2002), tarando opportunamente il coefficiente α in essa contenuto, mentre per la stima di S_f è stata utilizzata la formula di Chezy nella forma adottata da Caleffi e Valiani.

5.1 Dam-break su fondo asciutto

Nella modellazione numerica dei fenomeni di dam-break su fondo inizialmente asciutto, il livello dell'acqua a valle della paratoia è stato assunto coincidente con quello più alto dello strato di materiale solido che riveste il fondo della canaletta. Nella Figura 5 sono riportati, con riferimento all'istante $t = 0.2$ s dall'apertura della paratoia, i confronti tra i profili sperimentali dell'acqua (Y_w) e delle quote di fondo (z_b) ottenuti da Capart & Young, quelli ottenuti col modello di Caleffi & Valiani e quelli ottenuti con il modello accoppiato sopra descritto.

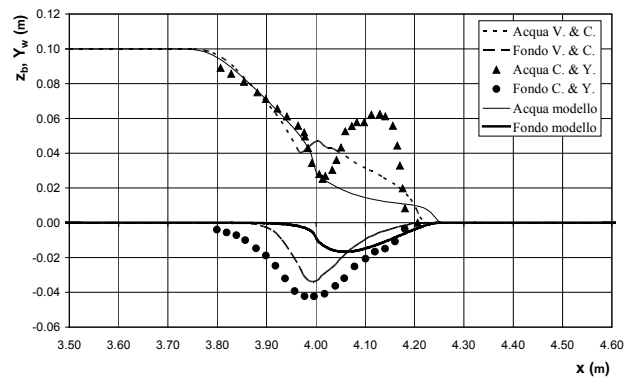


Figura 5. Confronto dei risultati del modello proposto con dati sperimentali e con risultati di Valiani & Caleffi (2002)

Comparison between experimental data, results of the model proposed in the paper and results by Valiani & Caleffi.

Dal confronto appare evidente come il modello di Caleffi & Valiani, caratterizzato da una precisione del secondo ordine, riproduca meglio i dati sperimentali di Capart e Young. Tuttavia, nonostante la sua intrinseca minore precisione (di modello preciso al primo ordine), il modello proposto sembra, comunque, simulare abbastanza correttamente, almeno in linea di massima, le caratteristiche del flusso, riproducendo bene il "fenomeno del ritardo" osservato in casi analoghi (col fronte dell'onda più avanzato rispetto all'escavazione del fondo)

5.2 Dam-break su fondo bagnato

Nella modellazione numerica del fenomeno di dam-break su fondo inizialmente già bagnato è stata ipotizzata la presenza, a valle della paratoia, di uno strato d'acqua di una certa altezza misurata a partire dal livello più alto dello strato di materiale solido posto a rivestimento della canaletta, e tale che, detti H_M e H_V i tiranti idrici iniziali a monte e a valle della paratoia, prima della sua apertura, si avesse un rapporto $H_M / H_V = 2$.

La Figura 6 illustra i confronti tra i profili numerici dell'acqua e delle quote del fondo ottenuti da Caleffi &

Valiani e quelli ottenuti utilizzando lo schema numerico accoppiato proposto, dopo 0.5 s dall'apertura della paratoia.

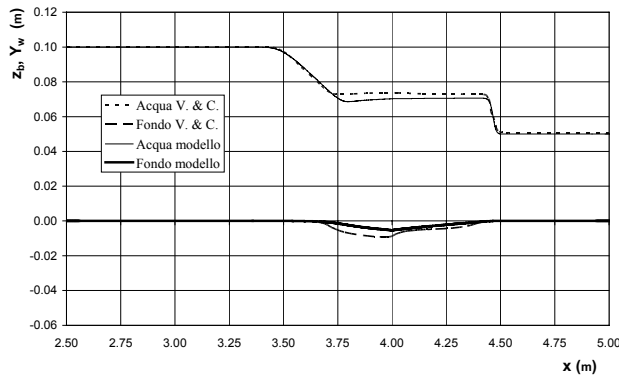


Figura 6. Confronto dei risultati del modello proposto con i risultati del modello di Valiani & Caleffi.
Comparison between the results obtained using the coupled model and those obtained by Valiani & Caleffi

Conclusioni

La modellazione, per via numerica, dei processi di evoluzione d'alveo, può essere effettuata con riferimento a diversi approcci metodologici, e a diverse tecniche numeriche. Nel presente lavoro, con specifico riferimento all'impiego di una tecnica numerica estremamente robusta ed affidabile, ancorché ulteriormente migliorabile in termini di precisione dei risultati ottenuti (quale è, nella forma adottata, il Metodo dei Volumi Finiti), sono stati analizzati due distinti approcci, basati sull'utilizzazione, rispettivamente, di tre o quattro equazioni, e su tecniche di risoluzione "disaccoppiate" o "accoppiate". I risultati ottenuti dall'applicazione dei due modelli a casi di studio per i quali sono disponibili soluzioni teoriche o dati sperimentali mostrano, in generale, la maggiore efficienza del secondo approccio, e la possibilità, da parte di quest'ultimo, di portare in conto anche transitori estremamente rapidi, quali i fenomeni di dam-break su fondo mobile. Miglioramenti potranno essere altresì conseguiti con l'utilizzazione di metodi al secondo ordine di approssimazione nel tempo e nello spazio.

Bibliografia

- Armanini A. & Di Silvio G. (1988) – *A one-dimensional model for the transport of sediment mixture in non-equilibrium condition*. Journal of Hydraulic Research, 26(3), 275-292.
- Brufau P., Garcia-Navarro P., Ghilardi P., Natale L. & Savi F. (2000) – *1D mathematical modelling of debris flow*. JHR 38(6), 435-446.
- Caleffi V. & Valiani A. (2002) – *A mathematical model for dam-break over movable bed*. River flow 2002, edited by D. Bousmar & Y. Zech, Proc. of the Int. Conf. on Fluvial Hydraulics, Louvain la Neuve, Belgium, 4-6 Settembre 2002, A.A. Balkema Publisher, The Netherlands, Vol.2, 991-1001.
- Capart H. & Young D. L. (1998) – *Formation of a jump by the dam-break wave over a granular bed*. J. Fluid Mech., Vol. 372, 435-446.
- de Vries M. (1965) – *Considerations about Non-Steady Bed Load Transport in Open Channels*. Proc. XI Congr. I.A.H.R., Vol. 3, paper 3.8, Leningrad, U.R.S.S.
- Fracarollo L. & Toro E. F. (1995) – *Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems*. Journ. of Hydr. Res., IAHR, Vol. 33, n. 6, 843-864.
- Hsu H.-C. & Chu P.-C. (1964) – *Study of river bed degradation and aggradation by the method of characteristics*. Chinese Journal of Hydr. Engineering, No. 5, Ottobre.
- Pianese D. (1993) – *Influenza della non stazionarietà e non uniformità del trasporto solido sui processi d'evoluzione d'alveo*. Collana del Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale "Girolamo Ippolito" dell'Università di Napoli Federico II, pubbl. n. 725, 24 pp.
- Van Rijn, L. C. (1984) – *Sediment transport, Part I: bed load transport*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, n. 10, Ottobre, 1431-1456.
- Van Rijn, L. C. (1984) – *Sediment transport, Part II: suspended load transport*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, n. 11, Novembre, 1613-1641.